Die partielle Integration

Herleitung:

$$f(x)=u(x)\cdot v(x)$$
$$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$
$$\Rightarrow u(x)\cdot v(x)=\int\left(u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)\right)dx$$
$$\Rightarrow u(x)\cdot v(x)=\int u'(x)\cdot v(x)dx+\int u(x)\cdot v'(x)dx$$
$$\Rightarrow \int u(x)\cdot v'(x)dx=u(x)\cdot v(x)-\int u'(x)\cdot v(x)dx$$

Beispiele:

1 Bestimmen Sie für die Funktion f mit $f(x)=x\cdot e^x$ mit $D_f=\mathbb{R}$ das unbestimmte Integral.

$$\int \underbrace{x}_{u(x)}\cdot\underbrace{e^x}_{v'(x)}dx=x\cdot e^x-\int 1\cdot e^x dx=x\cdot e^x-e^x+C \quad C\in\mathbb{R}$$

2 Bestimmen Sie für die Funktion f mit $f(x)=x^2\cdot e^{x+1}$ mit $D_f=\mathbb{R}$ das unbestimmte Integral.

$$\int \underbrace{x^2}_{u(x)}\cdot\underbrace{e^{x+1}}_{v'(x)}dx=x^2\cdot e^{x+1}-\int \underbrace{2x}_{u(x)}\cdot\underbrace{e^{x+1}}_{v'(x)}dx=$$
$$=x^2\cdot e^{x+1}-\left[2xe^{x+1}-\int 2\cdot e^{x+1}dx\right]=x^2\cdot e^{x+1}-2xe^{x+1}+2e^{x+1}+C \quad C\in\mathbb{R}$$

3 Bestimmen Sie für die Funktion f mit $f(x)=\ln(x)$ mit $D_f=\left]0;\infty\right[$ das unbestimmte Integral.

$$\int \underbrace{\ln(x)}_{u(x)}\cdot\underbrace{1}_{v'(x)}dx=\ln(x)\cdot x-\int\frac{1}{x}\cdot x\,dx=\ln(x)\cdot x-\int 1dx=\ln(x)\cdot x-x+C \quad C\in\mathbb{R}$$

4 Bestimmen Sie für die Funktion f mit $f(x)=x\cdot\ln(x)$ mit $D_f=\left]0;\infty\right[$ das unbestimmte Integral.

$$\int \underbrace{\ln(x)}_{u(x)}\cdot\underbrace{x}_{v'(x)}dx=\ln(x)\cdot\frac{1}{2}x^2-\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}x^2dx=\ln(x)\cdot\frac{1}{2}x^2-\int\frac{1}{2}x\,dx=$$
$$=\ln(x)\cdot\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^2+C \quad C\in\mathbb{R}$$

Aufgaben:

1.0 Berechnen Sie die unbestimmten Integrale mithilfe der partiellen Integration.

1.1 $\int x(x-1)^4\,dx$ 1.2 $\int (2x+5)(x+2)^8\,dx$ 1.3 $\int 2x\cdot e^{-x}\,dx$

1.4 $\int 2x^2\cdot e^{-3x}\,dx$ 1.5 $\int x^2\cdot \ln(x)\,dx$ 1.6 $\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$

1.7 $\int x^2\cdot\left(1-\ln(x)\right)dx$ 1.8 $\int\left(6x^2-2\right)\cdot\ln(x)\,dx$ 1.9 $\int \frac{x^3}{e^{-x}}\,dx$

2.0 In einem Skigebiet soll eine Skisprungschanze für die kleinen Skifahrer aus Schnee errichtet werden. Der Funktionsterm $h(s)=0{,}25s\cdot\ln(s)$ gibt im Intervall $s\in\left[1;2\right]$ die Höhe der Schanze in Abhängigkeit von der Länge s der Schanze an (Angaben in m).

2.1 Zeichnen Sie den Graphen von h im Intervall $\left]0;3\right]$ und markieren Sie dort die Skisprungschanze.

2.2 Berechnen Sie die Querschnittsfläche der Schanze.

2.3 Ermitteln Sie, wie viel kg Neuschnee für die Sprungschanze geliefert werden muss, wenn diese 10 Meter breit werden soll (Dichte $\rho_{\text{Neuschnee}}=150\frac{kg}{m^3}$).

3.0 Zum Hochwasserschutz eines Ortes an der Küste ist als eine Teilmaßnahme das Aufschütten eines 1 km langen Deichs aus Erde geplant. Der Querschnitt von diesem wird durch denjenigen Teil des Graphen der reellen Funktion f mit $f(x)=4\left(\frac{x}{5}-1\right)\cdot\ln\left(1-\frac{x}{5}\right)$ beschrieben, der oberhalb der x-Achse liegt.
Alle Einheiten sind dabei in m angegeben. Runden Sie gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen.

3.1 Bestimmen Sie die Definitionsmenge von f sowie die Breite des Deichs.

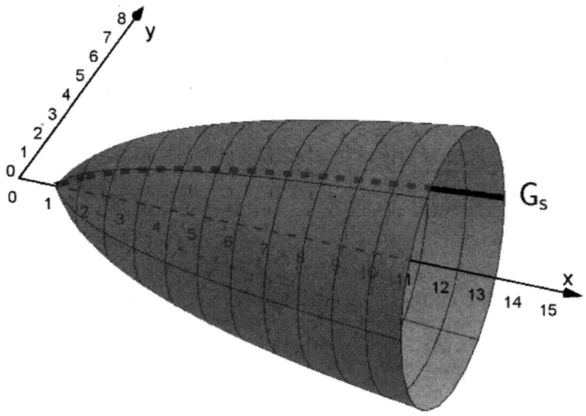
3.2 Berechnen Sie die maximale Höhe des Deichs.

3.3 Zeigen Sie, dass die Funktion $F(x)=\frac{\left(x-5\right)^2}{5}\left(2\ln\left(1-\frac{x}{5}\right)-1\right)$ eine Stammfunktion von f ist. Berechnen Sie damit $\int_0^{3{,}16} f(x)\,dx$ und interpretieren Sie den Wert im Sinne der vorliegenden Thematik.

4.0 Gegeben ist die Funktion $h: x \mapsto 2{,}25 \cdot \left[\ln(x)\right]^2$ mit ihrer maximalen Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}^+$. Der Graph von h wird mit G_h bezeichnet. (Abitur 2024 AII)

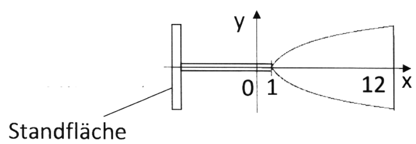
4.1 Zeigen Sie mithilfe partieller Integration, dass die Funktion H mit $H(x) = 2{,}25 \cdot x \cdot \left[\ln(x)\right]^2 - 4{,}5 \cdot x \cdot \ln(x) + 4{,}5 \cdot x$ und $D_H = \mathbb{R}^+$ eine Stammfunktion von h ist.

4.2.0 Nun wird zusätzlich die Funktion s mit der Definitionsmenge $D_s = [1;12]$ und der Gleichung $s(x) = 1{,}5 \cdot \ln(x)$ betrachtet. Es gilt also $\left[s(x)\right]^2 = h(x)$ für alle $x \in D_s$. Der Graph von s wird mit G_s bezeichnet. Lässt man G_s um die x-Achse rotieren, entsteht ein Rotationskörper (siehe nebenstehende Abbildung), welcher als Modell für den Kelch eines Saftglases dient. Die Koordinaten der Punkte sind Längenangaben in der Einheit Zentimeter. Auf die Mitführung der Einheiten kann bei den folgenden Rechnungen verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.



4.2.1 Die Volumenmaßzahl V des obigen Rotationskörpers kann mit dem Integral $V = \pi \cdot \int_1^{12} \left[s(x)\right]^2 dx$ berechnet werden. Zeigen Sie rechnerisch, dass das Saftglas ein maximales Flüssigkeitsvolumen von ca. 257 ml aufnehmen kann.

4.2.2 Die Standfläche des Saftglases soll kreisförmig sein und den gleichen Durchmesser wie die Querschnittsfläche des Rotationskörpers für x = 12 haben. Ermitteln Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieser Standfläche.



Lösungen:

1.1 $\int \underbrace{x}_{u(x)} \underbrace{(x-1)^4}_{v'(x)} dx = x \cdot \frac{1}{5}(x-1)^5 - \int 1 \cdot \frac{1}{5}(x-1)^5 dx = x \cdot \frac{1}{5}(x-1)^5 - \frac{1}{30}(x-1)^6 + C \quad C \in \mathbb{R}$

1.2 $\int \underbrace{(2x+5)}_{u(x)} \underbrace{(x+2)^8}_{v'(x)} dx = (2x+5) \cdot \frac{1}{9}(x+2)^9 - \int 2 \cdot \frac{1}{9}(x+2)^9 dx = (2x+5) \cdot \frac{1}{9}(x+2)^9 - \frac{1}{45}(x+2)^{10} + C \quad C \in \mathbb{R}$

1.3 $\int \underbrace{2x}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{v'(x)} dx = 2x \cdot (-e^{-x}) - \int 2 \cdot (-e^{-x}) dx = 2x \cdot (-e^{-x}) - 2 \cdot e^{-x} = -2e^{-x} \cdot (x+1) + C \quad C \in \mathbb{R}$

1.4 $\int \underbrace{2x^2}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^{-3x}}_{v'(x)} dx = 2x^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) - \int \underbrace{4x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)}_{v'(x)} dx =$

$= 2x^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) - \left[4x \cdot \frac{1}{9}e^{-3x} - \int 4 \cdot \frac{1}{9}e^{-3x}\right] = -\frac{2}{3}x^2 \cdot e^{-3x} - \frac{4}{9}x \cdot e^{-3x} - \frac{4}{27} \cdot e^{-3x} + C \quad C \in \mathbb{R}$

1.5 $\int \underbrace{x^2}_{v'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{u(x)} dx = \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln(x) - \frac{1}{9}x^3 + C \quad C \in \mathbb{R}$

1.6 $\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx = \int \underbrace{x^{-2}}_{v'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{u(x)} dx = -x^{-1} \cdot \ln(x) - \int (-x^{-1}) \cdot \frac{1}{x} dx =$

$= -\frac{1}{x} \cdot \ln(x) + \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x} \cdot \ln(x) - \frac{1}{x} + C \quad C \in \mathbb{R}$

1.7 $\int \underbrace{x^2}_{v'(x)} \cdot \left(\underbrace{1 - \ln(x)}_{u(x)}\right) dx = \frac{1}{3}x^3 \cdot (1 - \ln(x)) - \int \frac{1}{3}x^3 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) dx =$

$= \frac{1}{3}x^3 \cdot (1 - \ln(x)) + \int \frac{1}{3}x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \cdot (1 - \ln(x)) + \frac{1}{9}x^3 + C \quad C \in \mathbb{R}$

1.8 $\int \underbrace{(6x^2 - 2)}_{v'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{u(x)} dx = (2x^3 - 2x) \cdot \ln(x) - \int (2x^3 - 2x) \cdot \frac{1}{x} dx =$

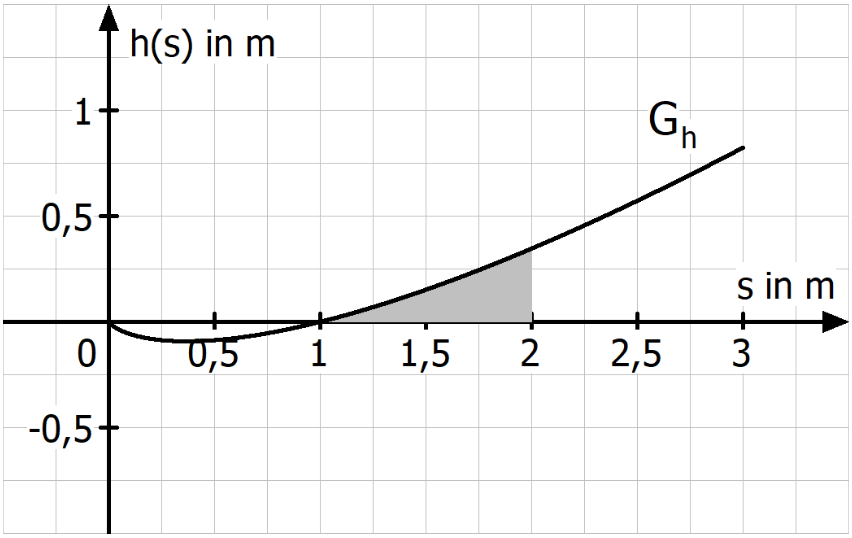
$= (2x^3 - 2x) \cdot \ln(x) - \int (2x^2 - 2) dx = (2x^3 - 2x) \cdot \ln(x) - \left(\frac{2}{3}x^3 - 2x\right) + C \quad C \in \mathbb{R}$

1.9 $\int \frac{x^3}{e^{-x}}dx = \int \underbrace{x^3}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{v'(x)} dx = x^3 \cdot e^x - \int \underbrace{3x^2}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{v'(x)} dx = x^3 \cdot e^x - \left[3x^2 \cdot e^x - \int 6x \cdot e^x dx\right] =$

$= x^3 \cdot e^x - 3x^2 \cdot e^x + \int \underbrace{6x}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{v'(x)} dx = x^3 \cdot e^x - 3x^2 \cdot e^x + 6x \cdot e^x - \int 6 \cdot e^x dx =$

$= x^3 \cdot e^x - 3x^2 \cdot e^x + 6x \cdot e^x - 6 \cdot e^x + C \quad C \in \mathbb{R}$

2.1



2.2

$$A = \int_1^2 \underbrace{0{,}25s}_{v'(s)} \cdot \underbrace{\ln(s)}_{u(s)} ds = \left[\frac{1}{8}s^2 \cdot \ln(s) - \int_1^2 \frac{1}{8}s^2 \cdot \frac{1}{s} ds\right]_1^2 =$$

$$= \left[\frac{1}{8}s^2 \cdot \ln(s) - \int_1^2 \left(\frac{1}{8}s\right) ds\right]_1^2 = \left[\frac{1}{8}s^2 \cdot \ln(s) - \frac{1}{16}s^2\right]_1^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \ln(2) - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{8} \cdot \ln(1) - \frac{1}{16}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln(2) - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2} \cdot \ln(2) - \frac{3}{16} \approx 0{,}16\,m^2$$

2.3 $m_{Neuschnee} = 0{,}16 \cdot 10 \cdot 150 = 240\,kg$

3.1

Definitionsmenge:

$1 - \frac{x}{5} > 0 \quad \Rightarrow x < 5 \quad \Rightarrow D_f = \left]-\infty;5\right[$

Breite des Deichs:

$4 \cdot \left(\frac{x}{5} - 1\right) \cdot \ln\left(1 - \frac{x}{5}\right) = 0$

$\Rightarrow 1) \quad \frac{x}{5} - 1 = 0 \quad \Rightarrow (x = 5) \notin D \quad 2) \ \ln\left(1 - \frac{x}{5}\right) = 0 \quad \Rightarrow 1 - \frac{x}{5} = 1 \quad \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow$ Der Deich ist 5 m breit.

3.2

$$f'(x)=4\cdot\left(\frac{1}{5}\cdot\ln\left(1-\frac{x}{5}\right)+\left(\frac{x}{5}-1\right)\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{5}}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\right)=4\cdot\left(\frac{1}{5}\cdot\ln\left(1-\frac{x}{5}\right)+\frac{1}{5}\right)$$

$$f'(x)=0\quad\Rightarrow\frac{1}{5}\cdot\ln\left(1-\frac{x}{5}\right)+\frac{1}{5}=0\quad\Rightarrow\ln\left(1-\frac{x}{5}\right)=-1\quad\Rightarrow 1-\frac{x}{5}=e^{-1}\quad\Rightarrow x=5-5e^{-1}\approx 3{,}16$$

Skizze von f':

$\Rightarrow x\approx 3{,}16$ Maximum

Da f im Definitionsbereich nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf

$\Rightarrow x\approx 3{,}16$ absolutes Maximum

$f(3{,}16)\approx 1{,}47$

Die maximale Höhe des Deichs beträgt 1,47 m.

3.3

$$F'(x)=\frac{1}{5}\cdot 2\cdot(x-5)\cdot\left(2\ln\left(1-\frac{x}{5}\right)-1\right)+\frac{(x-5)^2}{5}\cdot 2\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{5}}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=$$

$$=\frac{2}{5}\cdot(x-5)\cdot\left(2\ln\left(1-\frac{x}{5}\right)-1\right)-\frac{2}{5}\cdot(x-5)\cdot\frac{x-5}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{5}}=$$

$$=\frac{2}{5}\cdot(x-5)\cdot\left(2\ln\left(1-\frac{x}{5}\right)-1\right)+\frac{2}{5}\cdot(x-5)=\frac{4}{5}\cdot(x-5)\cdot\ln\left(1-\frac{x}{5}\right)=$$

$$=4\cdot\frac{x-5}{5}\cdot\ln\left(1-\frac{x}{5}\right)=f(x)$$

$\Rightarrow$ F ist eine Stammfunktion von f.

$$\int_0^{3{,}16} f(x)dx=\left[\frac{(x-5)^2}{5}\cdot\left(2\ln\left(1-\frac{x}{5}\right)-1\right)\right]_0^{3{,}16}\approx -2{,}03-(-5)\approx 2{,}97$$

Der Flächeninhalt des Querschnitts des Deichs bis zum höchsten Punkt beträgt 2,97 m^2.

4.1

$$\int \underbrace{2{,}25}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\left[\ln(x)\right]^2}_{v(x)} dx = 2{,}25x \cdot \left[\ln(x)\right]^2 - \int \left(2{,}25x \cdot 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= 2{,}25x \cdot \left[\ln(x)\right]^2 - \int \underbrace{4{,}5}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v(x)} dx = 2{,}25x \cdot \left[\ln(x)\right]^2 - \left[4{,}5x \cdot \ln(x) - \int 4{,}5x \cdot \frac{1}{x} dx\right] =$$

$$= 2{,}25x \cdot \left[\ln(x)\right]^2 - 4{,}5x \cdot \ln(x) + \int 4{,}5 dx = 2{,}25x \cdot \left[\ln(x)\right]^2 - 4{,}5x \cdot \ln(x) + 4{,}5x + C$$

mit $C = 0 \Rightarrow H(x)$

4.2.1

$$V = \pi \cdot \int_1^{12} h(x) dx = \pi \cdot \left[2{,}25x \cdot \left[\ln(x)\right]^2 - 4{,}5x \cdot \ln(x) + 4{,}5x\right]_1^{12} =$$

$$= \pi \cdot \left[\left(2{,}25 \cdot 12 \cdot \left[\ln(12)\right]^2 - 4{,}5 \cdot 12 \cdot \ln(12) + 4{,}5 \cdot 12\right) - \right.$$

$$\left. \left(2{,}25 \cdot 1 \cdot \left[\ln(1)\right]^2 - 4{,}5 \cdot 1 \cdot \ln(1) + 4{,}5 \cdot 1\right)\right] =$$

$$= \pi \cdot \left[\left(27 \cdot \left[\ln(12)\right]^2 - 54 \cdot \ln(12) + 54\right) - (4{,}5)\right] \approx \pi \cdot 82{,}03 \approx 257{,}72\ \text{cm}^3 > 257\ \text{ml}$$

Das Saftglas kann ein maximales Flüssigkeitsvolumen von ca. 257 ml aufnehmen.

4.2.2

$$A_{\text{Standfläche}} = r^2 \cdot \pi$$

$$d = 2 \cdot s(12) = 2 \cdot 1{,}5 \cdot \ln(12) = 3 \cdot \ln(12)$$

$$\Rightarrow A_{\text{Standfläche}} = \left(1{,}5 \cdot \ln(12)\right)^2 \cdot \pi \approx 43{,}65$$